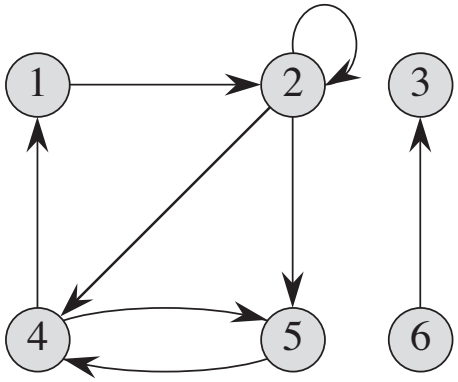
Grafi

- Si dice grafo un insieme di nodi legati "a due a due" da archi direzionati (o no)
- I grafi sono strutture dati di fondamentale importanza in informatica
- Vi sono centinaia di problemi computazionali ad essi legati
- Qui parleremo di alcuni algoritmi elementari sui grafi
  - Soprattutto visita di grafi

G=(V,E)

- V insieme dei nodi
- E insieme degli archi (u,v)
- Se G è direzionato l'arco (u,v) è ***uscente*** da u ed ***entrante*** in v
- Se (u,v) è in E, v è ***adiacente*** a u

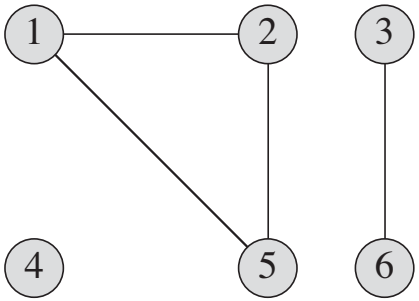


Grafi non direzionati

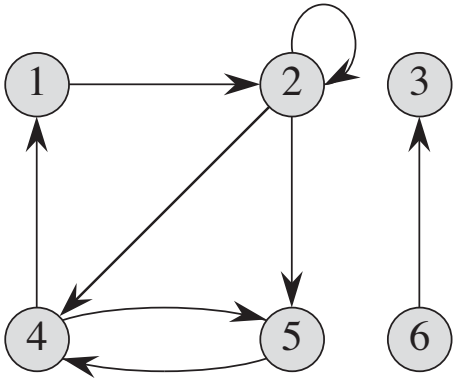
G=(V,E)

- V insieme dei nodi
- E insieme degli archi

- E consiste di coppie non ordinate di nodi
- Self-loops non ammessi
- In (u,v) u e v sono sia entranti che uscenti
- Adiacenza è simmetrica



Grafi



Grado di un nodo (caso non direzionato)

- Numero di archi entranti

Grado di un nodo (caso direzionato)

- Numero di archi entranti + numero di archi uscenti

Cammino (di lunghezza k) da u a v

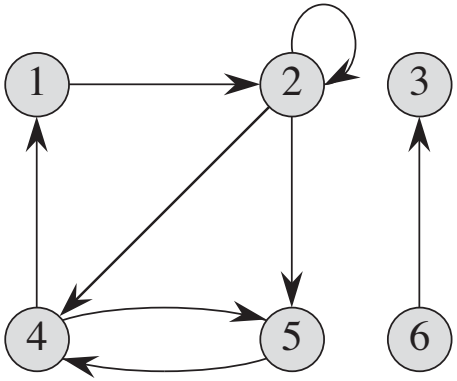
- Sequenza $v_0, \ldots, v_k$ tale che $u=v_0$ e $v=v_k$

Il cammino **contiene** i vertici $v_0,\ldots,v_k$ e gli archi $(v_0, v_1),\ldots, (v_{k-1}, v_k)$

- Un nodo v è **raggiungibile** da u se esiste un cammino da u a v

- Il cammino è **semplice** se tutti i vertici in esso contenuti sono distinti

Grafi



Cammino (di lunghezza k) da u a v

- Sequenza $v_0, \ldots, v_k$ tale che $u=v_0$ e $v=v_k$

Sottocammino: Sequenza di vertici di un cammino es: $v_i,\ldots,v_j$ per $0 \leq i \leq j \leq k$

Ciclo: Cammino $v_0, \ldots, v_k$ in cui $v_0=v_k$

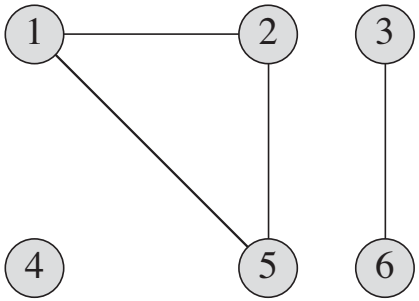
- Il ciclo è semplice se tutti i suoi nodi sono distinti.

Un grafo senza cicli è detto **aciclico**.

Grafi

- Grafo (non direzionato) **connesso**: ogni coppia di vertici è unita da un cammino.

- Componenti connesse: classi di equivalenza determinate dalla relazione “è raggiungibile da”



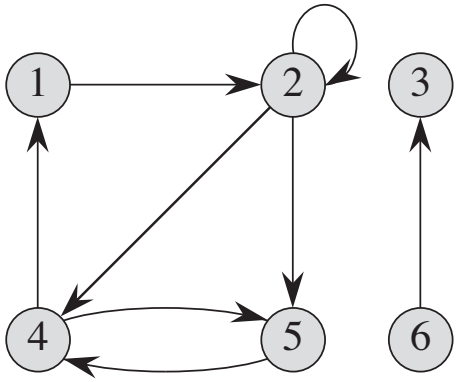
Componenti connesse: {1,2,3}, {3,6}, {4}

Un grafo non direzionato è connesso se ha 1 componente connessa

Grafi

- Grafo (direzionato) **fortemente connesso**: per ogni coppia di vertici (u,v) esiste un cammino che unisce u a v e v a u.

- Componenti **fortemente** connesse: classi di equivalenza determinate dalla relazione "sono mutualmente raggiungibili"



Componenti fortemente connesse:
{1,2,4,5}, {3}, {6}

Grafi

- G’=(V’,E’) **sottografo** di G=(V,E) se V’ sottoinsieme di V e E’ sottoinsieme di E

- Un grafo (non direzionato) è completo se ogni coppia di vertici è adiacente

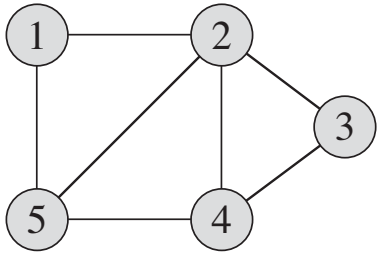
Rappresentare un grafo

Due modi fondamentali:

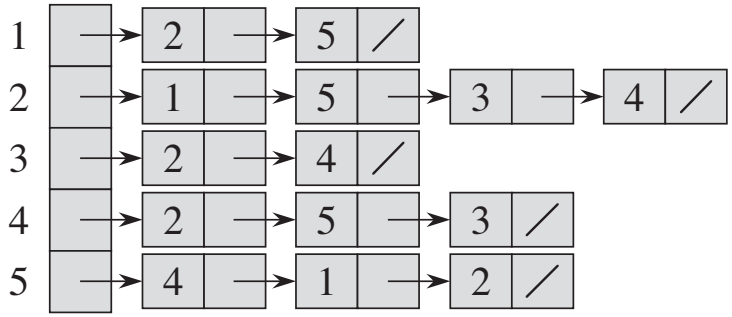
- Liste di adiacenza
  - Utile soprattutto per rappresentare grafi sparsi (con pochi archi)
  - Richiede $O(\max(|V|,|E|))=O(|V|+|E|)$ spazio
- Matrici di adiacenza
  - Richiede $O(|V|^2)$ spazio

Liste di adiacenza – Grafi non direzionati

- Array di |V| liste (una per ogni vertice)
- Adj[u] contiene (puntatori a) tutti i vertici v per i quali (u,v) è in E
- La somma delle lunghezze di tutte le liste è 2|E|



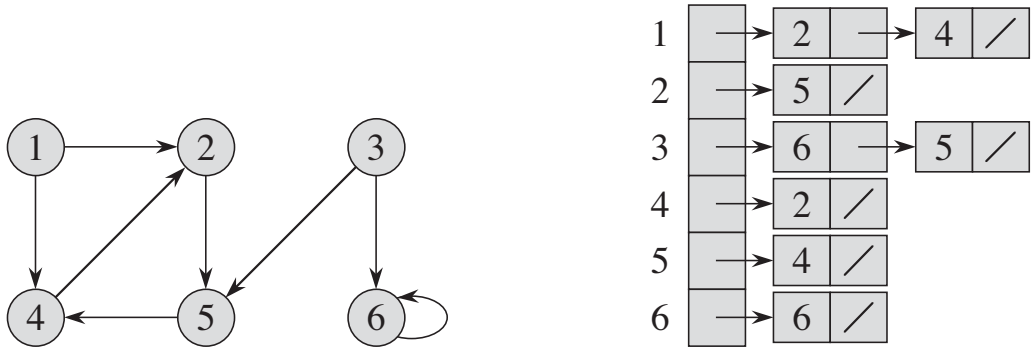
(a)



(b)

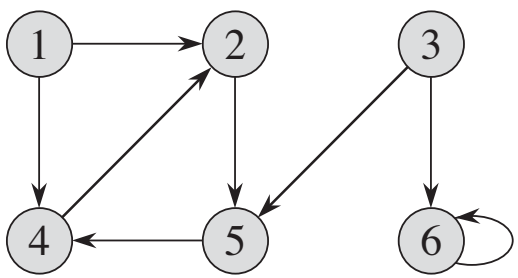
Liste di adiacenza – Grafi direzionati

- Array di |V| liste (una per ogni vertice)
- Adj[u] contiene (puntatori a) tutti i vertici v per i quali (u,v) è in E
- In tal caso, la somma delle lunghezze di tutte le liste è |E|



Matrici di adiacenza

- $A=[a_{ij}]$
- $a_{ij}=1$ se (i,j) è un arco in E (0 altrimenti)



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

Ricerca in ampiezza (Breadth-First-Search)

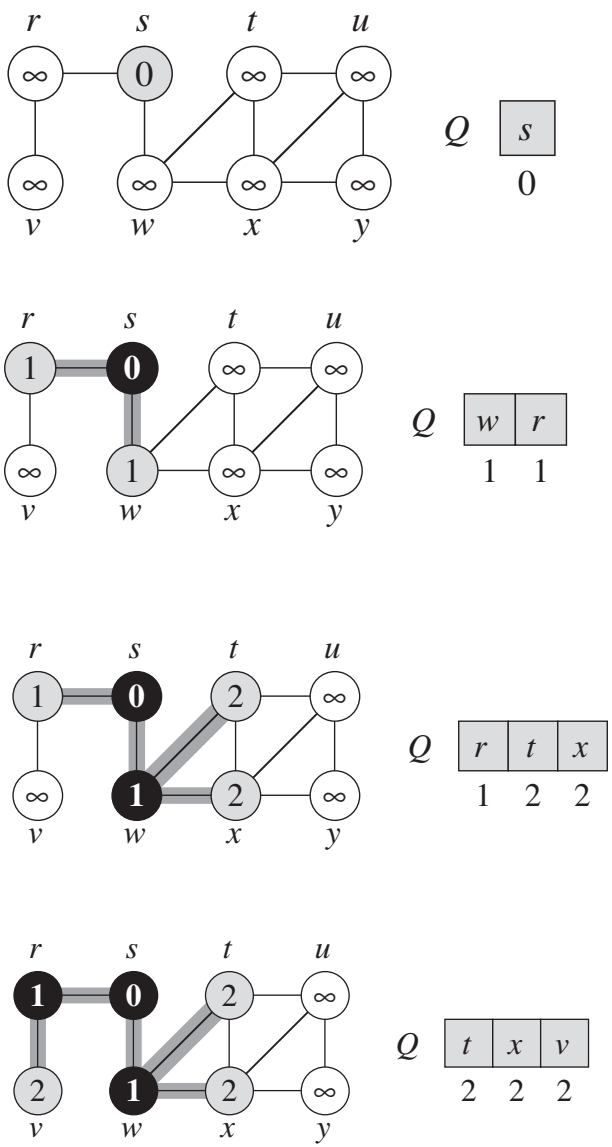
- Dato un vertice s, "esploriamo" il grafo per scoprire ogni vertice v raggiungibile da s.
  - Calcola la distanza di ogni v da s.
  - L'algoritmo (implicitamente) produce un breadth-first-tree (BFT)
    - Il campo predecessore fa riferimento proprio a tale albero.
  - Il cammino da s a v in BFT rappresenta il cammino più breve.
- Supporremo una rappresentazione tramite liste di adiacenza.

Ricerca in ampiezza -- Idee

- Inizialmente ogni nodo è colorato bianco
  - Poi i nodi diventeranno grigi o neri.
- Un nodo è **scoperto** quando è visitato la prima volta.
  - Diventa non-bianco
  - Nodi grigi: possono essere adiacenti (anche) a nodi bianchi.
    - Rappresentano la frontiera tra ciò che è già stato scoperto e ciò che non lo è ancora.
  - Nodi neri: possono essere adiacenti solo a nodi non bianchi.

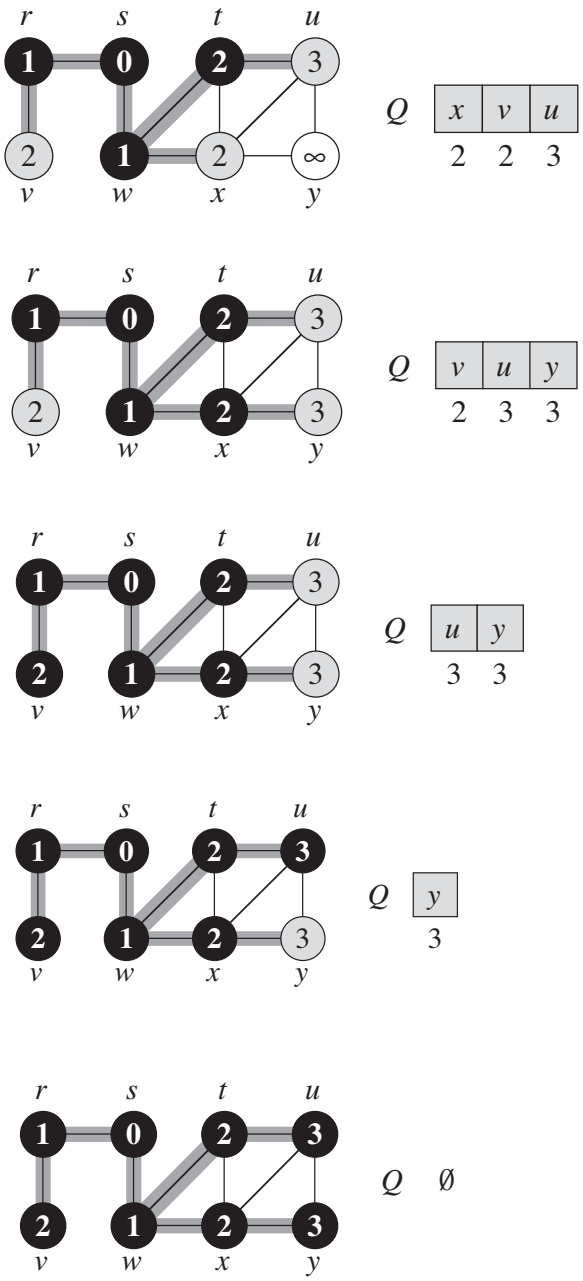
Ricerca in ampiezza

```
BFS(G,s)
    for each vertex u in V[G] – {s}
        color[u]=white;
        d[u]=MAX;
        pred [u]=NULL;
    color[s]=gray;
    d[s]=0; pred[u]=NULL;
    Q.Enqueue(s);
    while (Q.NotEmpty())
        u=Q.Dequeue();
        for each v in Adj[u]
            if (color[v]==white)
                color[v]=gray;
                d[v]=d[u] + 1; pred[v]=u;
                Q.Enqueue(v);
        color[u]= black;
```



Ricerca in ampiezza

```
BFS(G,s)
for each vertex u in V[G] – {s}
        color[u]=white;
        d[u]=MAX;
        pred [u]=NULL;
color[s]=gray;
d[s]=0; pred[u]=NULL;
Q.Enqueue(s);
while (Q.NotEmpty())
        u=Q.Dequeue();
        for each v in Adj[u]
                if (color[v]==white)
                        color[v]=gray;
                        d[v]=d[u] + 1; pred[v]=u;
                        Q.Enqueue(v);
        color[u]= black;
```



Ricerca in ampiezza

```
BFS(G,s)
for each vertex u in V[G] – {s}
        color[u]=white;
        d[u]=MAX;
        pred[u]=NULL;
color[s]=gray;
d[s]=0; pred[u]=NULL;
Q.Enqueue(s);
while (Q.NotEmpty())
        u=Q.Dequeue();
        for each v in Adj[u]
                if (color[v]==white)
                        color[v]=gray;
                        d[v]=d[u] + 1; pred[v]=u;
                        Q.Enqueue(v);
        color[u]= black;
```

Complessità: O(n+m)

Breadth-first Trees

- La procedura BFS(G,s) costruisce un albero (grafo dei predecessori G_p)
  - Ad ogni nodo è associato un predecessore
- V_p={v in V : p[v]≠NULL}
- E_p={(p[v],v) in E : v in V_p, v≠s}
- G_p è un albero in cui
  - C'è un unico cammino da s a v (in V_p) che è anche il cammino più breve
  - Gli archi in E_p sono chiamati **tree-edges**.

Print-Path

- *Supponiamo di aver già eseguito BFS(G,s)*

```
Print-Path(G,s,v)
1. if (v==s) print s
2. else if pred[v]==NULL
3.          print "No path from s to v"
4. else     Print-Path(G,s,pred[v])
5.          print v
```

Ricerca in Profondità: DFS

- Il grafo viene visitato in profondità piuttosto che in ampiezza
- Gli archi sono esplorati a partire dal nodo v che
  - Sia stato scoperto più di recente
  - Abbia ancora archi (uscenti) non esplorati
- Quando gli archi uscenti di v terminano, si fa backtracking
  - Si esplorano eventuali altri archi uscenti dal nodo precedente a v.
- Il processo è ripetuto fin quando vi sono nodi da esplorare.

Depth first forests

- Se v è scoperto scorrendo la lista di adiacenza di u, p[v]=u
- Come per BFS si definisce un grafo dei predecessori G_p
- V_p=V
- E_p={(p[v],v) in E : v in V, p[v]≠NULL}
- G_p **non è** un albero (ma una foresta)
  - Depth first forest

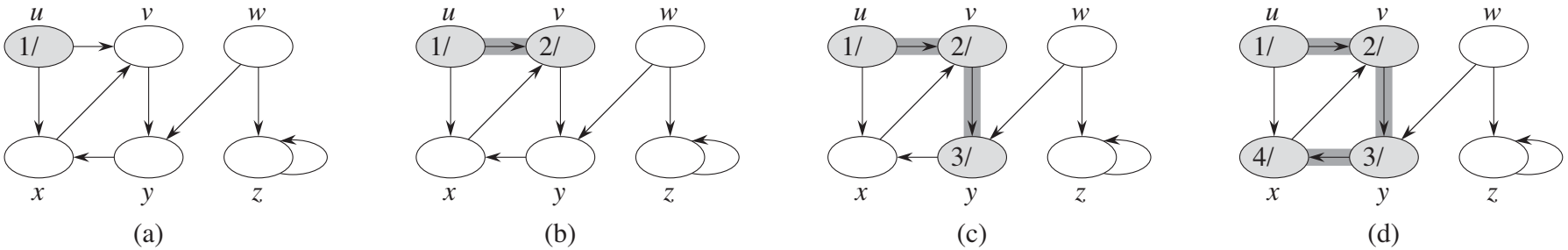
Timestamps

- DFS marca temporalmente ogni vertice visitato
  - Ogni v ha due etichette
  - La prima -- d[v] -- registra quando il nodo è stato scoperto (bianco-> grigio)
  - La seconda – f[v] – registra quando la ricerca finisce di esaminare la lista di adiacenza di v (grigio-> nero)
  - Per ogni v, d[v]<f[v]

DFS

```
DFS(G)
for each u in V[G]
        color[u]=white:
        pred[u]=NULL;
time = 0
for each u in V[G]
    if (color[u]==white)
        DFS-Visit(u)
```

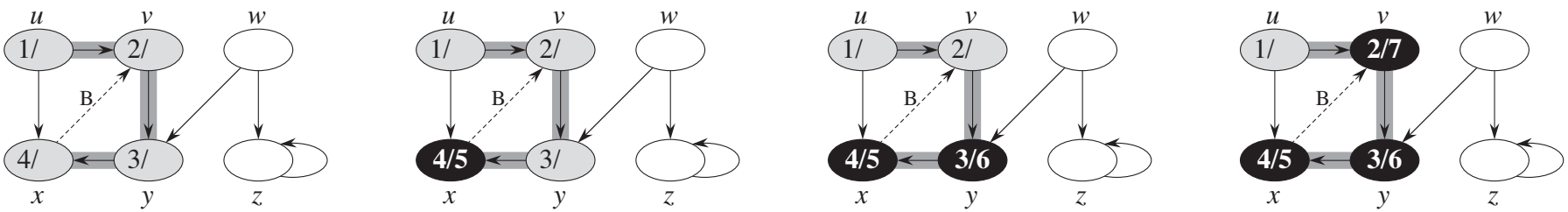
```
DFS-Visit(u)
color[u]=grey; d[u]=time+1;
for each v in Adj[u]
    if (color[v]==white)
        pred[v]=u;
        DFS-Visit(v);
color[u]=black
f[u]=time+1;
```



DFS

```
DFS(G)
for each u in V[G]
        color[u]=white:
        pred[u]=NULL;
time = 0
for each u in V[G]
    if (color[u]==white)
        DFS-Visit(u)
```

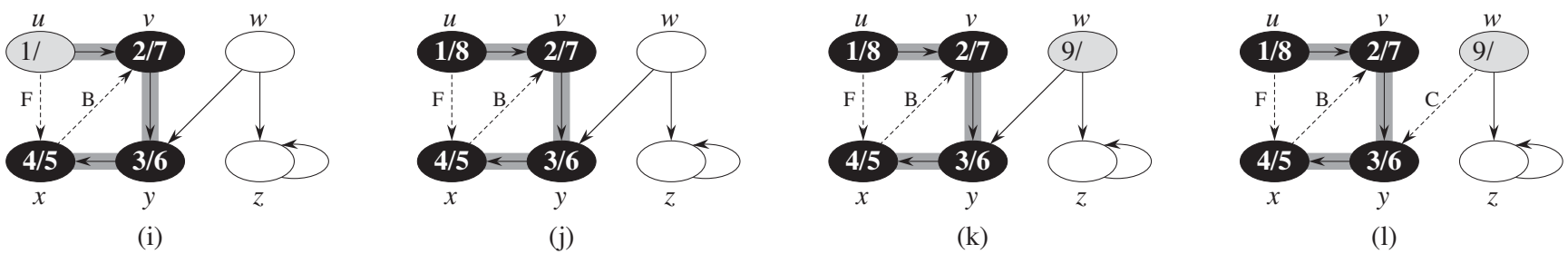
```
DFS-Visit(u)
color[u]=grey; d[u]=time+1;
for each v in Adj[u]
    if (color[v]==white)
        pred[v]=u;
        DFS-Visit(v);
color[u]=black
f[u]=time+1;
```



DFS

```
DFS(G)
for each u in V[G]
        color[u]=white:
        pred[u]=NULL;
time = 0
for each u in V[G]
    if (color[u]==white)
        DFS-Visit(u)
```

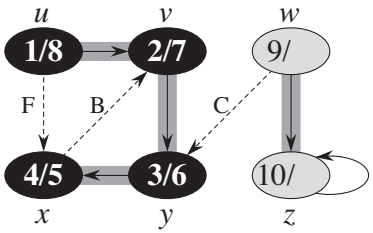
```
DFS-Visit(u)
color[u]=grey; d[u]=time+1;
for each v in Adj[u]
    if (color[v]==white)
        pred[v]=u;
        DFS-Visit(v);
color[u]=black
f[u]=time+1;
```



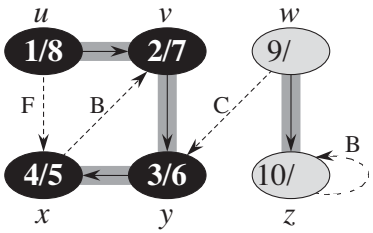
DFS

```
DFS(G)
for each u in V[G]
        color[u]=white:
        pred[u]=NULL;
time = 0
for each u in V[G]
    if (color[u]==white)
        DFS-Visit(u)
```

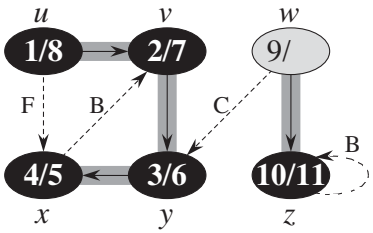
```
DFS-Visit(u)
color[u]=grey; d[u]=time+1;
for each v in Adj[u]
    if (color[v]==white)
        pred[v]=u;
        DFS-Visit(v);
color[u]=black
f[u]=time+1;
```



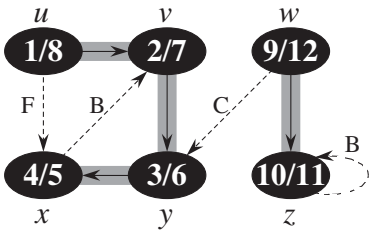
(m)



(n)



(o)



(p)

Classificazione degli archi

Tree edges

- Archi nella depth-first forest G_p
- (u,v) è un tree-edge se v è scoperto (per le prima volta) quando si è esplorato l'arco (u,v)

Back edges

- (u,v) collega u ad un antenato v nel depth-first tree

Forward edges

- (u,v) collega u ad un discendente v nel depth-first tree

Cross edges

- Tutti gli altri tipi di archi.

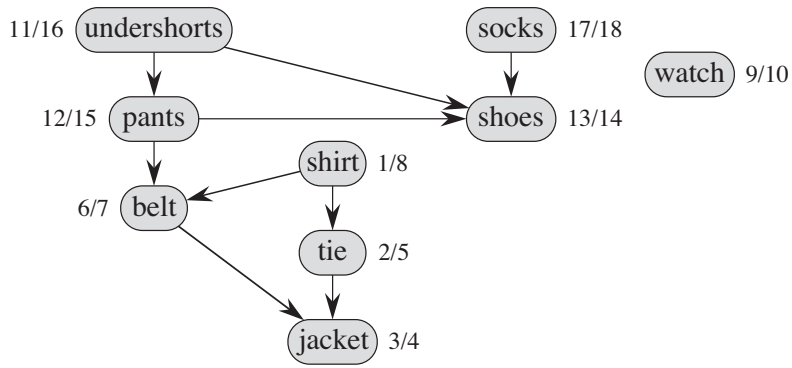
Topological Sort (Ordinamento topologico)

- DFS può essere usato per fare TS di un grafo diretto e aciclico
- Un grafo è aciclico se e solo se non ha back edges

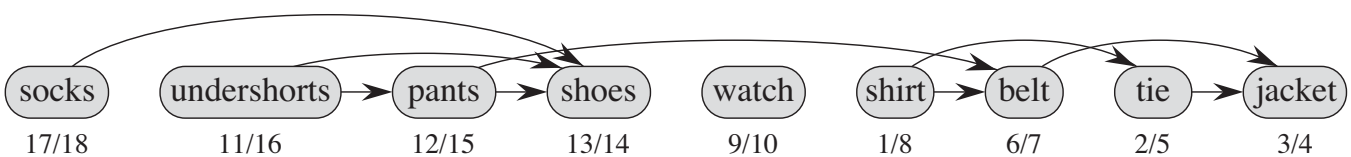
Ordinamento Topologico

- Ordinamento lineare di tutti i vertici
- Se (u,v) è in G allora u precede v nell'ordinamento.
- Può essere visto come come un ordinamento dei vertici su una linea orizzontale.

Esempio



- (u,v) indica che u deve essere indossato prima di v



- I vertici sono ordinati in base al tempo di completamento (f)

Topological Sort

TOPOLOGICAL SORT(G)

1. DFS(G) // *Permette di calcolare f[v] per ogni v*
2. Non appena viene calcolato f[v], inserisci v (in testa) in L
3. return L

- L lista concatenata
- Complessità: O(|E|+|V|)

Componenti Fortemente Connesse (Strongly Connected Components)

- DFS permette di decomporre un grafo (diretto) nelle sue componenti fortemente connesse.
- Utilizziamo $G^T=(V,E^T)$ del grafo originario G

$$E^T=\{(u,v): (v,u) \text{ in } E\}$$

- Tempo per creare G^T: $O(|V|+|E|)$ (usando liste di adiacenza)
- G e G^T hanno le stesse componenti (fortemente) connesse.

Stronly Connected Components

SSC(G)

1. DFS(G) // *Permette di calcolare f[v] per ogni v*
2. Calcola G^T
3. DFS(G^T)
4. **return** i vertici di ogni albero del passo 3

- Complessità: O(|E|+|V|)